レクチャー ~~8~~ 7　（教科書 p.60, 61, 66, 67）

問題や解答など	頭の中の思考や考え方

例 6　x は実数とする。2つの条件 p：$x=2$，q：$x^2=4$ について，「$p \Longrightarrow q$」は真であるが，「$q \Longrightarrow p$」は偽である。

よって　p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

　　　　q は p であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

「必要条件」と「十分条件」

まず正しく覚えましょう！

命題　p ならば q が

真　← これが大切!!

のとき

p は q であるための 十分条件

q は p であるための 必要条件

といいます。

$x=2 \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} x^2=4$

（反例：$x=-2$）

○をつけた矢印を見て

$x=2$ は $x^2=4$ であるための 十分条件

$x^2=4$ は $x=2$ であるための 必要条件

となります。

$p \xrightarrow[\text{真}\ \bigcirc]{} q$

十分　　　必要

「十分」ならば「必要」

矢先は「必要」（矢印の先）

とかで覚えます。

例 7　　p：△ABC は長さの等しい3辺をもつ

　　q：△ABC は大きさの等しい3つの内角をもつ

について，2つの命題「$p \Longrightarrow q$」，「$q \Longrightarrow p$」がともに真であるから，「$p \Longleftrightarrow q$」であり，p と q は同値である。

両方 ○

$p \underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} q$

p は q であるための 必要十分条件

このとき　p と q は 同値（どうち） といいます。

問 5　x は実数，m，n は整数とする。次の □ の中に，「必要条件であるが，十分条件ではない」，「十分条件であるが，必要条件ではない」，「必要十分条件である」，「必要条件でも十分条件でもない」のうち，適切なものを入れよ。

(1)　$x<3$ は $-1<x<2$ であるための □。

(2)　$x=6$ は $x^2=36$ であるための □。

(3)　m，n が同符号であることは mn が正であるための □。

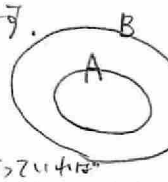
(4)　四角形 F の内角の大きさがすべて等しいことは辺の長さがすべて等しいための □。

POINT

手順①　□ は □ ⇄ □ と書いて準備します

手順②　○× 判定をします。

手順③　○をつけた矢印を見て答えます。



こうなっていれば A ならば B は 真です。

(1)　$x<3 \underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} -1<x<2$　反例：$x=2.5$

矢先ですよね。

$x<3$ は $-1<x<2$ であるための

必要条件

(2)　$x=6 \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} x^2=36$　反例：$x=-6$

$x=6$ は $x^2=36$ であるための

十分条件

(3)　m, n が同符号 $\underset{\bigcirc}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ mn が正

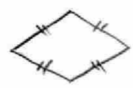
必要十分条件

※ m, n が同符号 と mn が正 は 同値ということです。

(4)

反例： 長方形

内角の大きさがすべて等しい $\underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ 辺の長さがすべて等しい

反例： ひし形

どちらでもない

問題や解答など　｜　頭の中の思考や考え方

例 9　x, y は実数とする。

「$x<2$ かつ $y \geqq 5$」の否定は「$x \geqq 2$ または $y<5$」である。

「$x=2$ または $y=5$」の否定は「$x \neq 2$ かつ $y \neq 5$」である。

(1) 「$x<2$ かつ $y \geqq 5$」

$\updownarrow$　$\updownarrow$　$\updownarrow$　否定

「$x \geqq 2$ または $y<5$」

(2) 「$x=2$ または $y=5$」

$\updownarrow$　$\updownarrow$　$\updownarrow$　否定

「$x \neq 2$ かつ $y \neq 5$」

「否定」のつくり方　**POINT**

		（否定）
イコール $=$	$\longleftrightarrow$	$\neq$
$<$	$\longleftrightarrow$	$\geqq$（イコールに注意！）
かつ	$\longleftrightarrow$	または
〜の両方とも 〜のすべて	$\longleftrightarrow$	少なくとも1つは 〜

問 7　x, y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)　$x \geqq 1$ かつ $y \leqq 4$

$\updownarrow$　$\updownarrow$　$\updownarrow$

$x<1$ または $y>4$

(2)　$x \leqq 5$ または $y>8$

$\updownarrow$　$\updownarrow$　$\updownarrow$

$x>5$ かつ $y \leqq 8$

注意すべき問題

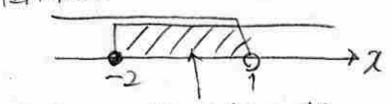
(3)　$x<-2$ または $x \geqq 1$

$\updownarrow$　$\updownarrow$　$\updownarrow$

$x \geqq -2$ かつ $x<1$　△

この答えでは不十分となります。

図にかくと



「かつ」なのでこの部分です

ここはふつう　$-2 \leqq x < 1$　○

とかくのでこれが答えです。

(4)　$3<x \leqq 7$

$\updownarrow$　$\updownarrow$

$3 \geqq x > 7$　……バツです。

x は 7より大きくて 3以下。

オカシイですよね。

$3<x \leqq 7$ は

$3<x$ かつ $x \leqq 7$ のことです。だから

$\updownarrow$　$\updownarrow$　$\updownarrow$

$3 \geqq x$ または $x>7$　これが正解です。

問 1　次の命題の真偽を答えよ。

(1)　すべての実数 x について　$x^2+2x+1>0$

(2)　すべての整数 n について，n^2+n は偶数である。

「すべての」は文字どおり 例外なく すべてです。

1つでも成り立たないのがあれば偽

(1)は一見 真のようですが $x=-1$ のとき

左辺は0、右辺も0で

「>」が成り立ちません。

よって 偽です。

(2)は n^2+n

$=n(n+1)$

これは連続する2つの整数の積なので

n か $n+1$ のどちらかは必ず偶数になります。

だから その積 $n(n+1)$ は必ず偶数になる

ので 真です。

問 2　次の命題の真偽を答えよ。

(1)　ある実数 x について　$x^2=x$

(2)　ある実数 x について　$x^2<0$

「ある」は 1つでも成り立つものがあれば 真 です。

(1)は $x=0$ とか $x=1$ が成り立つから 真。

(2)は $(実数)^2 \geqq 0$ だから $x^2<0$ になる実数は

1つもない　よって 偽。

問題や解答など	頭の中の思考や考え方

問 3 次の命題の否定を述べよ。

(1) すべての実数 x について　$x^2 \geqq 0$

(2) ある実数 x について　$x^2 \neq 2$

(1) すべての実数 x について　$x^2 \geqq 0$ …真

$\updownarrow$　　$\updownarrow$

ある実数 x について　$x^2 < 0$ …偽

(2) ある実数 x について　$x^2 \neq 2$ …真

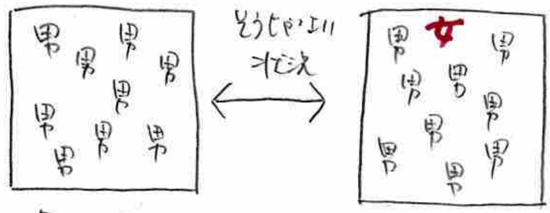
$\updownarrow$　　$\updownarrow$

すべての実数 x について　$x^2 = 2$ …偽

(注) この問題は「否定をつくれ」なので、その真偽は問われていません。
ちなみに命題の真偽は右側です。

※「すべての」の否定は…

例えば「全員男子」という状況を考えて下さい。この否定（そうじゃない状況）は「全員女子」ですか？



「全員男子」　　これですよね。

これを

「少なくとも1人は女子」

と表現すればよいのです。

つまり「すべて男子」の否定は

「ある1人は男子ではない、つまり女子」ですよね。

今日の課題へのアドバイス。

◎ 命題「m, n の少なくとも一方は偶数」の否定

「m, n の両方とも奇数」と考えます。

◎ 命題「p ならば q」の否定は

「p であって q でないものが存在する」と答えますよ。

◇今日の課題（LEGEND）

練習 44，47，49

レクチャー $\boxed{8}$ （教科書 p. 62. 63 ）

問題や解答など ／ 頭の中の思考や考え方

例10 x は実数とする。命題「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$」について

この命題の逆は「$x^2=4 \Longrightarrow x=2$」

この命題の裏は「$x \neq 2 \Longrightarrow x^2 \neq 4$」

この命題の対偶は「$x^2 \neq 4 \Longrightarrow x \neq 2$」

である。これらの命題の真偽を考えると，もとの命題と対偶は真，逆と裏は $x=-2$ という反例をもつから，偽である。

$p \Rightarrow q$ の逆は $q \Rightarrow p$

$p \Rightarrow q$ の裏は $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

$p \Rightarrow q$ の対偶は $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

P63で出てくるように。

命題「$p \Rightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」の真偽は一致します。

（p63の上部分の内容を確認すること）

問8 x は実数，n は自然数とする。次の命題の逆，裏，対偶をつくり，その真偽を答えよ。

(1) $x=0 \Longrightarrow x^2=0$

(2) n は6の約数 $\Longrightarrow$ n は12の約数

(1) 逆は「$x^2=0 \Longrightarrow x=0$」 真

裏は「$x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$」 真

対偶は「$x^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$」 真

(2) 逆は「nは12の約数 $\Longrightarrow$ nは6の約数」

裏は「nは6の約数でない $\Longrightarrow$ nは12の約数でない」

対偶は「nは12の約数でない $\Longrightarrow$ nは6の約数でない」

真偽について. 対偶は真

逆と裏は偽（反例 $n=12$）

対偶の真偽は分かりにくかったかもしれないが，このようなときは，もとの命題と，その対偶の真偽は一致することを考えて，もとの命題の真偽を考えた方がよい。

例11 x，y は実数とする。命題「$x+y \neq 5 \Longrightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$」の対偶「$x=2$ かつ $y=3 \Longrightarrow x+y=5$」は真である。

したがって，「$x+y \neq 5 \Longrightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$」は真である。

例題 1 対偶を利用した証明

n は整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明せよ

証明 この命題の対偶は「n は奇数 $\Longrightarrow$ n^2 は奇数」である。

奇数 n は，ある整数 k を用いて，$n=2k+1$ と表される。

したがって

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

ここで，$2k^2+2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である。

以上より，対偶が真であるから，もとの命題も真である。

最後まできちんと書きましょう。

このまま証明しようとすると n^2が偶数より $n^2=2k$（kは整数）と表され $n=\sqrt{2k}$ となるが，これから nは偶数を示すのは示しにくい。そこで対偶を考えた方が証明しやすいのではないかと考えてみることが大切。

奇数は $2\times$(整数)$+1$ と表されるので $4k^2+4k+1$ を $2\times$(整数)$+1$ となるように必ず変形しましょう。

問題や解答など	頭の中の思考や考え方

問 9　n は整数とする。n^2+1 が偶数ならば，n は奇数であることを，対偶を用いて証明せよ。

→ p.68 問題6

(証) この命題の対偶は
「n は偶数 $\Longrightarrow$ n^2+1 は奇数」である。
n は偶数より $n=2k$ (k は整数) と表される。
したがって
$n^2+1=(2k)^2+1=4k^2+1=2\cdot2k^2+1$
ここで $2k^2$ は整数であるから、n^2+1 は奇数である。
以上より、対偶が真であるから、もとの命題も真である。

練習50. 51 ともに
「少なくとも一方は〜」が出てきます。
前回のレクチャーで「少なくとも一方は〜」を否定すると……が出てきましたよね!!
パッと出てこない人は確認ですよ。

◇今日の課題（LEGEND）
練習50. 練習51