レクチャー 3 （教科書 p. 30 ）

問題や解答など

応用例題 1 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$ (2) xy (3) x^2+y^2

(1) $x=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$

$y=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$

よって $x+y=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$

(2) $xy=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=3-1=2$

別解

(1) $x+y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)+2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}+2}{2}=2\sqrt{3}$

(2) $xy=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\cdot2}{2}=2$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(2\sqrt{3})^2-2\cdot2=8$

P30 問1

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(2\sqrt{3})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

別 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ と変形して解いてもよい

問18 $x=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$ (2) xy (3) x^2+y^2

(1) $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

よって $x+y=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{7}$

(2) $xy=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1}{2}$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(\sqrt{7})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=6$

補充問題 (4) x^4+y^4 の値はどうなる？

頭の中の思考や考え方

※ x, y の分母をそれぞれ有理化した。

※ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ と $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ を分母とする分数の加法では、通分すると同時に分母が有理化されるので、通分してもよい。

重要!!

$x^2+y^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2$

$=3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1=8$

としてもいいが、ここでは対称式であることに注目して考えよう。（対称式については教科書 P45）

対称式 …… x^2+y^2 や $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ のように式中のどの2つの文字を交換しても、もとの式と一致するような式。上記した2つの文字の対称式は、基本対称式である $x+y$ と xy を用いて表すことができる。

・$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

・$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

よく使います!!

パッと書けること!!

・補充問題 (4) の解答

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

$=6^2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\dfrac{71}{2}$

レクチャー 4 （教科書 p. 31, 33 ）

問題や解答など

頭の中の思考や考え方

例題 2 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分 a と小数部分 b を求めよ。

(解) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{3}<4$
2を足した

よって　$a=3$

$b=(2+\sqrt{3})-3$

$=\sqrt{3}-1$

重要!!

例えば　3.45 の整数部分は3，小数部分は0.45 である。ここで小数部分 0.45 は 3.45−3 であるから、次のようなことがわかる。

実数 x の小数部分 ＝ x −（x の整数部分）

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ のままだと整数部分が考えにくいので、分母を有理化

上の重要を用いた。

$b=\underbrace{(2+\sqrt{3})}_{もとの数}-\underbrace{3}_{2+\sqrt{3}の整数部分}$

問19　$\sqrt{10}$ の整数部分と小数部分を求めよ。

(解)　$3<\sqrt{10}<4$ より $\sqrt{10}$ の整数部分は 3

小数部分は $\sqrt{10}-3$

問20　$\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$ の整数部分 a と小数部分 b を求めよ。

(解) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{4} = \sqrt{5}+1$

$2<\sqrt{5}<3$ であるから、$3<\sqrt{5}+1<4$

よって　$a=3$

$b=(\sqrt{5}+1)-3$

$=\sqrt{5}-2$

上の重要を用いた。

発展　二重根号

P33の内容をしっかり確認しよう。

$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$　　ただし，$a>b$ とする。

重要!!

二重根号をはずすときは、……

まず $\sqrt{◎ \pm 2\sqrt{▨}}$ の形に変形して、足して ◎，掛けて ▨ である2数を a，b とすると

$\sqrt{◎+2\sqrt{▨}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{◎-2\sqrt{▨}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$（ただし $a>b$）

と変形できる

例 1

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5\cdot 2}}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

足して7、掛けて10 になる2数は 5と2

(2) $\sqrt{10-4\sqrt{6}} = \sqrt{10-2\sqrt{24}}$

$=\sqrt{(6+4)-2\sqrt{6\cdot 4}}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{4}=\sqrt{6}-2$

※ $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$ より、まず $4\sqrt{6}=2\cdot 2\sqrt{6}=2\sqrt{24}$ と変形

↳ 2ではないよね!! $2\sqrt{▨}$ の形になるようにしよう!!

※ 足して10、掛けて24になる2数は 6と4

(3) $\sqrt{5+\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{◎+2\sqrt{▨}}$ の形になっていないので

$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5+\sqrt{21}})}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$ と変形

$\sqrt{◎+2\sqrt{▨}}$ の形になった。

レクチャー 3, 4　◇今日の課題（LEGEND 練習 23, 24 の補足説明）

問題や解答など	頭の中の思考や考え方
練習23 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。 (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　(3) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$　(4) $x-\dfrac{1}{x}$ （解答はLEGENDの解答を参考にすること）	$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ から $x^2+1=\sqrt{5}x$ すなわち $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ を解くと計算が大変になる。 $\dfrac{1}{x}=y$ とみると、この問題は 「$x+y=\sqrt{5}$ のとき (1) x^2+y^2 (2) x^3+y^3 (3) x^5+y^5 の値を求めよ」 となり、対称式の考え方で解くことができることが分かる。 (3)の x^5+y^5 は $(x^2+y^2)(x^3+y^3)$ を展開すると $x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$ であるから $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$ と変形できる。　自分で作れるように!!
練習24 実数 a, b, c が $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=4$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ を満たすとき，次の式の値を求めよ。 (1) $ab+bc+ca$　(2) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$　(3) $a^4+b^4+c^4$ （解答は LEGENDの解答を参考にすること）	重要 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=4$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ は a, b, cの3文字について、いずれの文字を入れかえても同じ式になるので、a, b, cの3文字についての対称式です。 3文字の対称式は $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc だけで表すことができる。 ・$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ ・$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$ は、よく使います